Université Paris Diderot | MT1 MM1
L1 - Sciences Exactes | 2010-2011

SECTION A — Amphis 1–4–5

Partiel du 13 novembre 2010

Durée: 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Questions de cours

1. Soient E, F des ensembles (non vides) et $f : E \to F$ une application. Donner la définition de l'injectivité de f, de la surjectivité de f.

2. Dans $\mathbb{R}^n$, à quelle condition dit-on que les m ($m \leqslant n$) vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une famille libre ?

3. Qu'est-ce qu'une base de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1-i)z - 2 + i = 0$. On exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne).

Exercice 2

1. Soient E, F deux ensembles non vides et $\varphi : E \to F$ une application. Après avoir rappelé la définition de l'image directe et de l'image réciproque, montrer que pour toute partie A de E on a l'inclusion suivante : $A \subset \varphi^{-1}\big(\varphi(A)\big)$.

2. On considère l'application:
$$\begin{aligned} f : [-\pi,\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x\,. \end{aligned}$$

   (a) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:
$$f^{-1}\big(\{0\}\big)\,,\ f^{-1}\big(\,]0,+\infty[\,\big)\,,\ f^{-1}\big([-1,0]\big)\,,\ f\big([\pi/6,\,\pi/3]\big)\,,\ f\big([\pi/2,\,\pi]\big)\,.$$

   (b) Donner un exemple de partie A de $[-\pi,\pi]$ pour laquelle:
$$f^{-1}\big(f(A)\big) \neq A\,.$$

Exercice 3

1. Déterminer la forme polaire des racines de l'équation $z^5 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$.

2. Déduire de la question précédente les factorisations dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^5 - 1$.

3. Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^5 - 1$ par le polynôme $X - 1$.

4. Déduire des deux questions précédentes l'identité suivante :

   $$(\star) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad 1+z+z^2+z^3+z^4 = \left(z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5} \cdot z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5} \cdot z + 1\right).$$

5. On se propose à présent de calculer $a = \cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = \cos\frac{4\pi}{5}$.

   A l'aide de l'identité $(\star)$ de la question précédente calculer $a+b$ et $2ab$, puis en déduire que a, b sont racines du trinôme :

   $$P(X) = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}.$$

6. Déduire de ce qui précède une expression algébrique exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

Exercice 4 On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + 3y - 2z + 4t = 0 \;\text{ et }\; 2x + 5y + 4z - t = 0\right\}$$

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base de F.

Exercice 5 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1,-2,1,-3)$, $u_2 = (3,-7,4,-5)$ et $u_3 = (2,-1,0,-9)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

2. A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6 Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X, \ \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Ces polynômes s'appellent les *polynômes de Tchebychev* de première espèce. On se propose ici de factoriser $T_n(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Démontrer que $T_2(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

2. Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes $T_2(X)$ et $T_3(X)$.

3. En procédant par récurrence, déterminer le degré de $T_n(X)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculer par récurrence le cœfficient dominant de $T_n(X)$ (c'est-à-dire le cœfficient du terme de plus haut degré).

5. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta).$$

   indication : on pourra utiliser la formule classique suivante :

   $$\forall a, b \in \mathbb{R},\ 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

6. Déduire de la question précédente que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

7. Etablir que l'ensemble des racines de $T_n(X)$ est l'ensemble

$$\mathcal{Z}(T_n) = \left\{ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$$

indication : on observera que les n réels $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, pour k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont deux à deux distincts.

8. Finalement en déduire la factorisation de $T_n(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.